8. Покой-движение при перемещении по спирали

8.1. Случай постоянных удельных скоростей

Если умножить прямолинейное радиальное движение и движение по окружности получим сложное движение по спирали, которое в случае постоянных удельных скоростей описывается системой вида:

$$\hat{\psi}_x = re^{-i\omega t}, \quad \hat{\psi}_y = ire^{-i\omega t}, \quad \text{где} \quad r = ae^{\beta t}. \tag{2.178}$$

Здесь ω - удельная круговая или азимутальная скорость и β - удельная радиальная скорость. Радиальная скорость - продольная, азимутальная - поперечная.

Движение по спирали есть движение по мгновенной азимутальной окружности или радиальной окружности радиуса r и радиального движения вдоль радиуса.

Потенциально-кинетический радиус движения по спирали, согласно (2.105), равен: $\hat{\mathbf{r}} = r\mathbf{n} + ir\tau$. Следовательно, потенциально-кинетическая скорость покоя-движения имеет вид:

$$\hat{\upsilon} = (\beta - i\omega)\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.179}$$

Скорость (2.179) определяет удельную потенциально-кинетическую скорость

$$\hat{\omega} = \omega_p + \omega_k = (-i\omega\mathbf{n} + i\beta\boldsymbol{\tau}) + (\beta\mathbf{n} + \omega\boldsymbol{\tau}) \tag{2.180}$$

и соответствующий ей момент импульса

$$\hat{\mathbf{L}} = mr^2\hat{\omega} = J\hat{\omega}. \tag{2.181}$$

Запишем скорость в виде суммы радиальной и азимутальной скоростей:

$$\hat{\upsilon} = \hat{\upsilon}_r + \hat{\upsilon}_a, \tag{2.182}$$

где

$$\upsilon_r = (\beta r - i\omega r)\mathbf{n}, \tag{2.182a}$$

- радиальная скорость;

$$\upsilon_a = (\omega r + i\beta r)\boldsymbol{\tau} \tag{2.182b}$$

- азимутальная скорость.

Радиальная и азимутальная скорости равны по модулю. Если $\beta > 0$, первая составляющая радиальной скорости $\beta r\mathbf{n}$ - кинетическая центробежная скорость радиального движения, при $\beta < 0$ эта составляющая - кинетическая центростремительная скорость; вторая составляющая $-i\omega r\mathbf{n}$ - потенциальная центростремительная скорость кругового движения. Первая составляющая азимутальной скорости $\omega r\boldsymbol{\tau}$ - кинетическая тангенциальная скорость кругового движения, вторая составляющая $i\beta r\boldsymbol{\tau}$ - потенциальная скорость радиального движения (рис.2.10а).

Перепишем формулу скорости в виде суммы потенциальной и кинетической скоростей:

$$\hat{\upsilon} = \upsilon_p + \upsilon_k, \tag{2.183}$$

где

$$\upsilon_p = -i\omega r\mathbf{n} + i\beta r\boldsymbol{\tau} \tag{2.183a}$$

- потенциальная скорость;

$$\upsilon_k = \beta r\mathbf{n} + \omega r\boldsymbol{\tau} \tag{2.183b}$$

- кинетическая скорость.

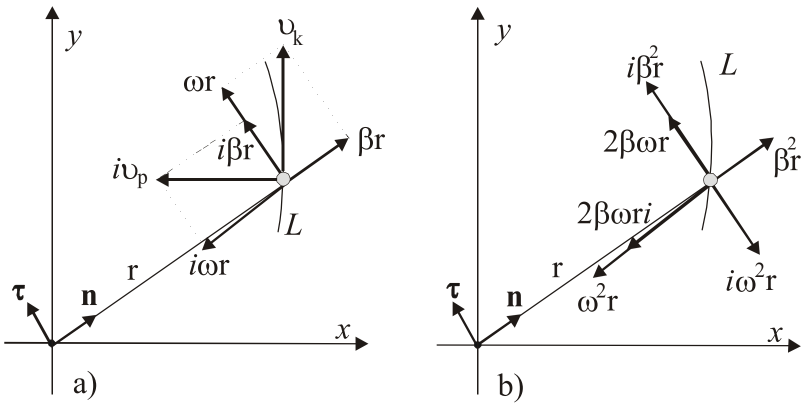

Рис.2.10. Графы скоростей и ускорений в движении-покое по спирали с постоянными удельными скоростями ω и β.

Структура потенциально-кинетической скорости такова: первая потенциальная радиальная скорость $-i\omega r\mathbf{n}$ перпендикулярна кинетической азимутальной скорости $\omega r\boldsymbol{\tau}$ и составляет с ней единый комплекс покоя-движения по спирали; вторая потенциальная азимутальная скорость $i\beta r\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярна кинетической радиальной скорости $\beta r\mathbf{n}$ и составляет с ней также единый комплекс покоя-движения по спирали.

Скорости $\omega r\boldsymbol{\tau}$ и $-i\omega r\mathbf{n}$ описывают азимутальное изменение кинематического радиус-вектора $\hat{\mathbf{r}}$, т.е. изменение по направлению или квалитативное изменение.

Скорости $\beta r\mathbf{n}$ и $i\beta r\boldsymbol{\tau}$ описывают радиальное изменение кинематического радиус-вектора $\hat{r}$, т.е. изменение по величине или квантитативное изменение.

Потенциальная и кинетическая скорости равны по модулю, что выражает равенство покоя и движения. Следовательно, полная потенциально-кинетическая энергия движения материальной точки по спирали равна нулю, что и следовало ожидать.

Запишем ускорение в виде суммы радиальной и азимутальной ускорений. Согласно формуле (2.179) ускорение в этом движении (рис.2.10b)

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_a = (\beta - i\omega)^2\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.184}$$

где

$$\mathbf{w}_r = (\beta^2 - 2\omega\beta ri - \omega^2)r\mathbf{n}, \tag{2.184a}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_a = (\beta^2 - 2\omega\beta ri - \omega^2)ri\boldsymbol{\tau}. \tag{2.184b}$$

Потенциально-кинетическая структура ускорения имеет вид:

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}_k \tag{2.185}$$

где

$$\mathbf{w}_p = (\beta^2 - \omega^2)r\mathbf{n} + 2\omega\beta r\boldsymbol{\tau} \tag{2.185a}$$

- кинетическое ускорение, и

$$\mathbf{w}_k = (-2\omega\beta)ir\mathbf{n} + (\beta^2 - \omega^2)ir\boldsymbol{\tau} \qquad (2.185b)$$

- потенциальное ускорение.

Ускорение определяет потенциально-кинетическую кинему и ее момент:

$$\hat{\mathbf{F}} = m\hat{\mathbf{w}} = mr\hat{\varepsilon}\,, \qquad \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{F}}r = mr\hat{\mathbf{w}} = mr^2\hat{\varepsilon} = J\hat{\varepsilon}\,, \qquad (2.186)$$

где $\hat{\varepsilon}$ - удельное потенциально-кинетическое ускорение:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_k\,, \qquad (2.187)$$

причем

$$\hat{\varepsilon}_p = (\beta^2 - \omega^2)\mathbf{n} + 2\omega\beta\,\boldsymbol{\tau}\,, \qquad (2.187a)$$

$$\varepsilon_k = (-2\omega\beta)i\mathbf{n} + (\beta^2 - \omega^2)i\boldsymbol{\tau}\,. \qquad (2.187b)$$

Рассмотрим скорость изменения момента импульса:

$$\hat{\mathbf{M}}_L = \frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{dJ}{dt}\hat{\omega} + J\hat{\varepsilon} = 2J\beta\hat{\omega} + J\hat{\varepsilon} \qquad \text{или} \qquad \hat{\mathbf{M}}_L = V_J\hat{\omega} + \hat{\mathbf{M}}\,, \qquad (2.188)$$

где $V_J = \dfrac{dJ}{dt}$ - скорость изменения момента инерции и $\hat{\mathbf{M}} = J\hat{\varepsilon}$. - момент кинемы. Если $\beta \to 0$, движение становится круговым и $\hat{\mathbf{M}}_L = \hat{\mathbf{M}}$.

Мгновенная удельная скорость по касательной к спирали

$$\hat{\omega}_\rho = \omega_p + \omega_k = \left[(-i\omega r\mathbf{n} + i\beta r\boldsymbol{\tau}) + (\beta r\mathbf{n} + \omega r\boldsymbol{\tau})\right]/\,\rho\,, \qquad (2.189)$$

где $\rho = \sqrt{1+\beta^2}\,ae^{\beta t}$ - радиус кривизны спирали.

Отсюда следует:

$$\hat{\omega}_\rho = \omega_p + \omega_k = \left[(-i\omega r\mathbf{n} + i\beta r\boldsymbol{\tau}) + (\beta r\mathbf{n} + \omega r\boldsymbol{\tau})\right]/\sqrt{1+\beta^2} \qquad (2.189a)$$

Мгновенный момент импульса по касательной к спирали

$$\hat{\mathbf{L}} = J_\rho\hat{\omega}_\rho = J\hat{\omega}\sqrt{1+\beta^2}\,, \qquad (2.190)$$

где $J_\rho = m\rho^2$ и $J = mr^2$ - моменты инерции на касательной и радиальной окружностях.

8.2. Покой-движение с переменными удельными скоростями

Движение по спирали с переменными удельными скоростями описываем уравнениями:

$$\hat{\psi}_x = re^{-i\varphi}\,, \qquad \hat{\psi}_y = ire^{-i\varphi}\,, \qquad \text{где} \qquad r = ae^{\theta} \qquad (2.191)$$

Потенциально-кинетическая скорость при движении с переменными удельными скоростями равна

$$\hat{\upsilon} = (\beta - i\omega)\hat{\mathbf{r}}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \hat{\mathbf{r}} = r(\mathbf{n} + i\boldsymbol{\tau}). \tag{2.192}$$

Производная скорости определяет потенциально-кинетическое ускорение:

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_p + \hat{\mathbf{w}}_k = \left[(\eta - i\varepsilon) + (\beta - i\omega)^2\right] r(\mathbf{n} + i\boldsymbol{\tau}), \tag{2.193}$$

где $\eta = \dfrac{d\beta}{dt}$ - удельное радиальное ускорение, $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ - удельное азимутальное ускорение. Потенциальная и кинетическая составляющие ускорения равны

$$\mathbf{w}_p = (\eta + \beta^2 - \omega^2) r\mathbf{n} + (\varepsilon + 2\omega\beta) r\boldsymbol{\tau}, \tag{2.193a}$$

$$\mathbf{w}_k = (-\varepsilon - 2\beta\omega) ir\mathbf{n} + (\eta + \beta^2 - \omega^2) ir\boldsymbol{\tau}. \tag{2.193b}$$

8.3. Логическая и физическая структура потенциального и кинетического ускорений

Принимая во внимание, что радиальная удельная скорость β есть скорость количественного утверждения, азимутальная удельная скорость ω есть скорость качественного отрицания с модулем ω и модусом $i\omega$, проанализируем логическую и физическую структуру потенциального и кинетического ускорений (Рис.2.11).

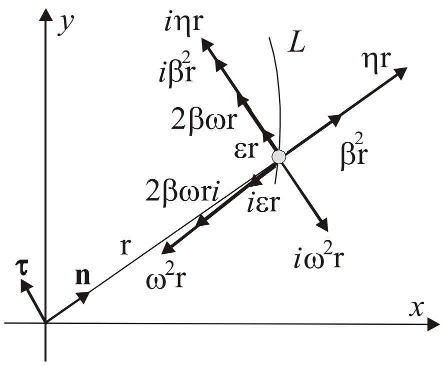

Рис.2.11. Граф ускорений покоя-движения по спирали с переменными удельными скоростями ω и β.

Составляющие потенциального ускорения:

а) ускорение утверждение утверждения (да·да):

$$+\beta^2 r\mathbf{n} \text{ - центробежное ускорение;}$$

б) ускорение полярного (радиального) отрицания полярного отрицания или ускорение двойного полярного отрицания (iнет·iнет) или кратко ускорение двойного отрицательного отрицания (-нет·нет):

$$-\omega^2 r\mathbf{n} \text{ - центростремительное ускорение;}$$

в) ускорение утверждения двойного полярного отрицания [да·(-iнет) (iнет)] или ускорение утверждения отрицания (да·нет):

$$\beta(-i\omega)(ir)\boldsymbol{\tau} = \beta\omega r\boldsymbol{\tau}$$ - тангенциальное ускорение;

г) ускорение отрицание утверждения (нет·да):

$$\omega\beta r\boldsymbol{\tau}$$ - тангенциальное ускорение.

д) сумма ускорений в) и г) определяет поперечное потенциальное ускорение Кориолиса:

$2\omega\beta r\boldsymbol{\tau}$ или $2\omega u_r\boldsymbol{\tau}$, где $u_r = \beta r$ - радиальная кинетическая скорость;

д) неравномерность покоя определяется нормальным и тангенциальным ускорениями:

$$\eta r\mathbf{n} + \varepsilon r\boldsymbol{\tau}.$$

Кинетическое ускорение есть полярное отрицание потенциального ускорения:

а) ускорение полярного отрицания двойного утверждения (iда·да):

$$i\beta^2 r\boldsymbol{\tau}$$ - тангенциальное ускорение;

б) ускорение отрицания двойного полярного отрицания iнет (iнет·iнет):

$$-i\omega^2 r\boldsymbol{\tau}$$ - тангенциальное ускорение;

в) ускорение утверждения полярного отрицания [да·(-i нет)]:

[illegible] - центробежное ускорение;

г) ускорение полярного отрицания утверждения (-iнет·да):

$$-i\omega\beta r\mathbf{n}$$ - центробежное ускорение;

д) сумма ускорений в) и г) определяет поперечное кинетическое ускорение Кориолиса:

$$2\omega\beta ri\boldsymbol{\tau} \text{ или } 2\omega u_r i\boldsymbol{\tau};$$

д) неравномерность движения определяется нормальным и тангенциальным ускорениями:

$$-\varepsilon r\mathbf{n}i + i\eta r\boldsymbol{\tau}.$$

8.4. Структура кинемы и ее моментов, удельные ускорения

На основании ускорения получаем формулу потенциально-кинетической кинемы при движении по спирали

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_k. \quad (2.194)$$

Потенциальная и кинетическая составляющие кинемы имеют вид:

$$\mathbf{F}_p = m(\eta + \beta^2 - \omega^2) r\mathbf{n} + m(\varepsilon + 2\omega\beta) r\boldsymbol{\tau} \tag{2.194a}$$

$$\mathbf{F}_k = m(-\varepsilon - 2\beta\omega) ir\mathbf{n} + m(\eta + \beta^2 - \omega^2) ir\boldsymbol{\tau}\,. \tag{2.194b}$$

Потенциально-кинетическое удельное ускорение повторяет структуру линейного ускорения (2.193):

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_p + \varepsilon_k\,, \tag{2.195}$$

где

$$\varepsilon_p = (\eta + \beta^2 - \omega^2)\mathbf{n} + (\varepsilon + 2\beta\omega)\boldsymbol{\tau} \tag{2.195a}$$

$$\varepsilon_k = (-\varepsilon - 2\beta\omega) i\mathbf{n} + (\eta + \beta^2 - \omega^2) i\boldsymbol{\tau} \tag{2.195b}$$

Потенциально-кинетический продольно-поперечный момент кинемы повторяет структуру удельного ускорения:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_\tau = J\hat{\varepsilon}\,, \tag{2.196}$$

где

$$\mathbf{M}_n = J(\eta + \beta^2 - \omega^2 - i\varepsilon - 2i\beta\omega)\mathbf{n}\,, \tag{2.196a}$$

$$\mathbf{M}_\tau = J(\eta + \beta^2 - \omega^2 - i\varepsilon - 2i\beta\omega) i\boldsymbol{\tau}\,. \tag{2.196b}$$

Осевой момент кинемы равен

$$\hat{\mathbf{M}}_0 = \hat{M}\mathbf{k} = J\hat{\varepsilon}_0\mathbf{k}\,, \tag{2.197}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_0 = (\eta + \beta^2 - \omega^2) - (\varepsilon + 2\beta\omega) i \tag{2.197a}$$

- осевое удельное ускорение покоя.

Скалярная составляющая осевого момента определяется с точностью до знака. Сегодня трудно сказать, когда и какие знаки выбирает природа.

Общие формулы моментов

$$\hat{\mathbf{M}}_n = M\mathbf{n}\,, \quad \hat{\mathbf{M}}_\tau = -iM\boldsymbol{\tau}\,, \quad \hat{\mathbf{M}}_0 = \pm M\mathbf{k} \tag{2.198}$$

показывают, что их модули равны.

Мгновенные удельные ускорения относительно касательной к спирали имеют вид:

$$\hat{\varepsilon}_\rho = \varepsilon_{\rho p} + \varepsilon_{\rho k}\,, \tag{2.199}$$

где

$$\varepsilon_p = \left[(\eta + \beta^2 - \omega^2)\mathbf{n} + (\varepsilon + 2\beta\omega)\boldsymbol{\tau}\right] / \sqrt{1+\beta^2}\,, \tag{2.199a}$$

$$\varepsilon_k = \left[-(\varepsilon + 2\beta\omega)i\mathbf{n} + (\eta + \beta^2 - \omega^2)i\boldsymbol{\tau}\right] / \sqrt{1+\beta^2}\,. \qquad (2.199b)$$

Соответствующий им потенциально-кинетический момент кинемы

$$\hat{\mathbf{M}} = m\rho^2\hat{\varepsilon}_\rho = J_\rho\hat{\varepsilon}_\rho \qquad (2.200)$$

8.5. Поле покоя-движения осевого поля спирального перемещения

Если центр кругового движения сам находится в движении со скоростью υ_0, тогда сумма полей движения по оси и окружности образуют достаточно сложное поле движения по спирали. Осевое поле спирального перемещения есть поле покоя-движения с линейной скоростью:

$$\hat{\upsilon} = \left[\upsilon_0\mathbf{k} + (-\upsilon_0 i)\mathbf{k}\right] + \omega a i\mathbf{k}\,, \qquad (2.201)$$

первая компонента которой в квадратных скобках описывает движение-покой по оси, а вторая отражает круговое движение. Отсюда получаем выражение для удельной скорости осевого поля:

$$\hat{\omega} = \left[\omega_0\mathbf{k} + (-\omega_0 i)\mathbf{n}\right] + \omega i\mathbf{k}\,, \qquad (2.202)$$

где $\omega_0 = \upsilon_0 / a$ удельная скорость осевого движения. На основании (2.202) находим импульс, кинематический заряд и момент импульса осевого поля:

$$\hat{\mathbf{P}} = \left[m\upsilon_0\mathbf{k} + (-m\upsilon_0 i)\mathbf{n}\right] + m\omega a i\mathbf{k}\,, \qquad (2.203)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \left[m\omega_0\mathbf{k} + (-m\omega_0 i)\mathbf{n}\right] + m\omega i\mathbf{k}\,, \qquad (2.204)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \left[m\upsilon_0 a\mathbf{k} + (-m\upsilon_0 a i)\mathbf{n}\right] + J\omega i\mathbf{k}\,. \qquad (2.205)$$

8.6. Момент импульса осевого поля спирали

Вернемся к моменту импульса осевого поля спирали. Его потенциальная составляющая, связанная с круговым движением, может быть представлена в виде:

$$\mathbf{L}_p = J\omega i\mathbf{k} = \frac{2m}{T}\pi a^2\mathbf{k} = iI_m S\mathbf{k}\,. \qquad (2.206)$$

Вектор

$$\mathbf{P}_{mp} = iI_m S\mathbf{k} \qquad (2.207)$$

назовем потенциальным моментом тока массы. Вектор момента тока рождается осевым потенциальным импульсом:

$$\mathbf{P}_p = m\upsilon_p = m\omega a\mathbf{k}\,. \qquad (2.208)$$

Дополнительный осевой кинетический момент тока массы выразим через потенциальный момент:

$$\mathbf{P}_{mp} = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_p} i I_m S \mathbf{k}\ , \tag{2.209}$$

где $\upsilon_p = \omega a$ - модуль потенциальной скорости; он же и модуль кинетической скорости движения по окружности. Аналогично связаны между собой кинетический и потенциальный осевые заряды:

$$q_k = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_p} q_p\ , \tag{2.210}$$

где

$$q_p = m\omega\ . \tag{2.211}$$

8.7. Описание любого физического движения триадой полей покоя-движения

Структура поля в круговом и прямолинейном движении носит всеобщий характер. Следовательно, гармоническое колебание материальной точки необходимо дополнить поперечным полем покоя, потенциальная скорость которого изменяется синфазно с кинетической скоростью колебаний, тогда как потенциальная скорость продольного поля имеет фазовый сдвиг на 90°.

Любое физическое движение неформальной конструкции можно представить как суперпозицию элементарных гармонических движений. Поэтому всякое реальное перемещение материальной точки в пространстве должно описываться, по крайней мере, триадой: поперечным полем покоя $P\mathbf{n}$ и осевыми полями движения $K\boldsymbol{\tau}$ и покоя $P\boldsymbol{\tau}$:

$$\hat{\Pi} = (P\mathbf{n}; K\boldsymbol{\tau}, P\boldsymbol{\tau})\ . \tag{2.212}$$

Если в потенциально-кинетическое движение-покой выражается формулой:

$$\hat{\Psi} = a\cos\omega t + ia\sin\omega t\ ,$$

триада поля покоя-движения на уровне перемещений, скоростей и ускорений имеет вид:

$$\hat{S} = (a\sin\omega t;\ ia\sin\omega t,\ a\cos\omega t)\ , \tag{2.213}$$

$$\hat{\upsilon} = (-ia\omega\sin\omega t;\ -a\omega\sin\omega t,\ ia\omega\cos\omega t)\ , \tag{2.214}$$

$$w = (-ia\omega^2\cos\omega t;\ -a\omega^2\cos\omega t,\ -ia\omega^2\sin\omega t)\ . \tag{2.215}$$

Можно утверждать, что осевое поле покоя в Микромире и Космосе отрицается своим поперечным полем, ибо в Мире наблюдается только круговое движение в широком смысле этого слова.